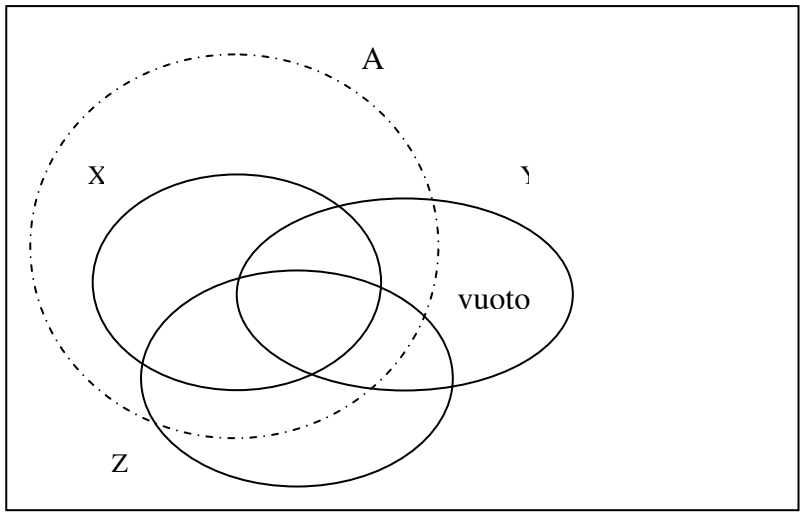
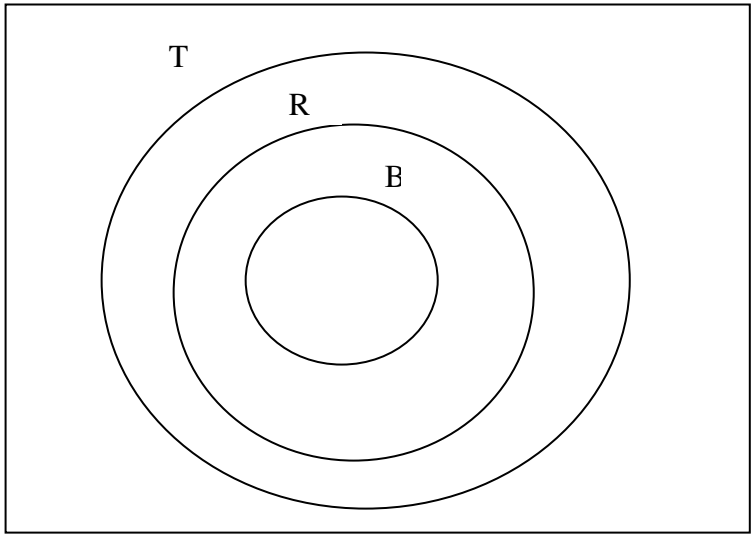
Allegato 3 –Problemi e relativa soluzione commentata

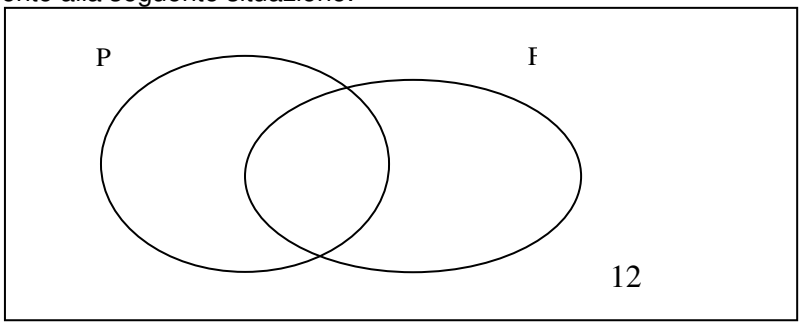
Codice ident.	Domanda	Risposta/ commento
1.2006.12.D	In un allevamento di bovini bisogna selezionare il più leggero fra 4 capi, avendo a disposizione un unico tipo di bilancia che, date due coppie di bovini, indica la coppia più leggera (si assuma che non esistano due coppie di bovini dello stesso identico peso). Nota bene: la bilancia non permette di confrontare il peso di due bovini fra loro e non fornisce il peso di una coppia di bovini. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera: a) 2 pesate sono sempre sufficienti b) 2 pesate non sono sempre sufficienti e 3 pesate sono sempre sufficienti c) ci sono casi in cui questo tipo di bilancia non permette di trovare il bovino più leggero d) nessuna delle precedenti	**Risposta:** C Chiamiamo i quattro bovini B(1),B(2),B(3),B(4) e per ogni bovino B(i) indichiamo con P(B(i)) il suo peso. Per ipotesi del problema nessuno ha peso uguale ad un altro possiamo quindi assumere senza perdere di generalità che P(B(1)) > P(B(2)) > P(B(3)) > P(B(4)). L'allevatore dovrà confrontare i pesi delle varie coppie. Immaginiamo ora che il peso del bovino più grande si decisamente più grande rispetto agli altri, ad esempio che pesi 30Kg, mentre gli altri pesano rispettivamente 11kg,10Kg e 9Kg. Visto che P(B(1))>P(B(i))+P(B(j)) per ogni i,j con 2<= i,j<= 4 avremo che in qualsiasi pesata la qualunque sia il bovino che non mettiamo B1 avremo che il peso di quella coppia sarà maggiore di qualsiasi altra. Avremo quindi che P(B(1))+P(B(i))>P(B(j))+P(B(q)) per ogni 2<= i,j,k<=4 Non possiamo quindi in questo caso sapere qual è il bovino più leggero, ma solo sapere il bovino più pesante
2.2005.1.M (medio per ottimizzazione, difficile per sistemi di numerazione)	Mario ha 83 macchinine che deve riporre in sacchetti. La suddivisione in sacchetti deve essere fatta in modo tale che quando i compagni di gioco di Mario gli chiederanno un numero qualsiasi di macchinine (compreso fra 1 e 83), Mario sarà in grado di consegnare il numero giusto di macchinine porgendo un certo numero di sacchetti senza aprirli per modificarne il contenuto. Quale è il numero minimo di sacchetti che Mario deve usare per riporre le sue macchinine? *Risposte:* *a) 7* *b) 8* *c) 21* *d) nessuna delle precedenti*	**Risposta:** A Possiamo fare riferimento alla rappresentazione binaria dei numeri da 1 a 63: con 6 sacchetti possiamo coprire qualsiasi numero da 1 a 63 (1+2+4+8+16+32). Ad esempio, nel caso in cui volessimo consegnare 10 macchinine, useremmo un sacchetto da 8 e un sacchetto da 2. Per i numeri *n* compresi fra 64 e 83 possiamo procedere così: riempiamo un ulteriore sacchetto con le restanti 20. La differenza *n*-20 sarà compresa tra 1 e 63 e la copriamo con il metodo precedentemente indicato. In questo modo potremo avere una soluzione per tutti i casi possibili.

3.2004.5.F	Durante una serata particolarmente limpida, con un bel cielo stellato, Antonio si concentra a guardare una porzione di cielo in cui sono visibili esattamente 99 stelle. Antonio si chiede quale fra queste stelle sia la più vicina. Ha a disposizione uno speciale misuratore che ha la capacità di confrontare fra loro 3 stelle ed indicarne la più vicina. Quale è il numero minimo di misurazioni che Antonio deve compiere per scoprire la stella più vicina? *Risposte:* *a) 33* *b) 49* *c) 99* *d) nessuna delle precedenti*	**Risposta:** B Numeriamo le stelle da 1 a 99 e subito cerchiamo il minimo tra le stelle 1,2,3. Prendiamo il minimo e lo confrontiamo con le stelle 4,5 e troviamo quindi il nuovo minimo. Iteriamo quindi questo procedimento finché non arriviamo alle stelle 98 e 99. All'inizio noi consideriamo le stelle 1,2,3 per cui da un totale di 99 stelle ne togliamo 3 e quindi abbiamo 96 stelle. In ogni altro passaggio consideriamo invece il minimo precedente e aggiungiamo due stelle quindi al totale togliamo due stelle. I passaggi saranno quindi 1 + (99-3)/2 = 49
4.2003.1.D	Alcune interessanti scoperte genetiche sui moscerini: - i moscerini con una mutazione del gene X sono sempre albini; - i moscerini non albini non hanno alcuna mutazione del gene Y, oppure hanno una mutazione sia del gene Y che del gene Z. Dite quale delle seguenti affermazioni e' sicuramente vera: a) se un moscerino e' albino, ha una mutazione del gene X; b) se un moscerino non ha una mutazione ne' nel gene Y ne' nel gene Z, allora e' albino; c) se un moscerino ha una mutazione nel gene Y ma non nel gene Z, allora e' albino; d) non esistono moscerini albini.	**Risposta:** C Rappresentiamo la situazione come segue (l'insieme A degli albini è tratteggiato). Dalla seconda condizione risulta vuoto l'insieme Y — A — (Y ∩ Z): non esistono moscerini non albini con la sola mutazione del gene Y. 

		Sottoponiamo ad esame le affermazioni: • a) è falsa, in quanto possono esistere moscerini facenti parte di A ma non di X • b) è falsa poiché possono esistere moscerini al di fuori dell'insieme $X \cup Y$ e pure al di fuori di A • c) risulta vera, in quanto gli elementi dell'insieme $Y - Z$ sono necessariamente dentro A • d) è falsa, in quanto l'esistenza di elementi in A è possibile in coerenza con tutte le condizioni.
5.2003.6.M	Nel Mercante di Venezia di Shakespeare, Porzia aveva tre scrigni, uno d'oro, uno d'argento e uno di piombo e in uno c'era il suo ritratto. Porzia voleva scegliere il suo sposo sulla base della sua intelligenza e fece incidere le seguenti iscrizioni sugli scrigni: Scrigno d'oro: il ritratto e' in questo scrigno Scrigno d'argento: il ritratto non e' in questo scrigno Scrigno di piombo: il ritratto non e' nello scrigno d'oro Porzia spiegò al suo pretendente che di queste tre affermazioni al massimo una era vera. Quale scrigno contiene il ritratto di Porzia?	**Risposta:** scrigno d'argento Conviene affrontare nell'ordine le quattro ipotesi: • Supponiamo che sia vera la frase riportata sullo scrigno d'oro: allora la scritta su quello d'argento sarebbe pure vera, il che contraddice la condizione che sia vera al massimo una affermazione. • Se fosse vera la frase sullo scrigno d'argento, allora dovrebbe essere falsa anche la frase su quello d'oro, e quindi il ritratto dovrebbe essere in quello di piombo, ma allora dovrebbe essere vera anche la frase su quest'ultimo, contraddicendo la condizione già citata. • Supponiamo sia vera la frase sullo scrigno di piombo: il ritratto non è in quello d'oro, pertanto quanto scritto su quest'ultimo risulta falso, coerentemente con le condizioni; deve essere falso anche quanto scritto sullo scrigno d'argento, e quindi il ritratto deve trovarsi in tale scrigno. • Supponiamo infine che siano false tutte e tre le affermazioni: quelle riportate sugli scrigni d'oro e di piombo sono una la negazione dell'altra, pertanto non possono essere entrambe false!
6.2007.4.F	La famiglia di Caterina consiste di Daniele, Maria, Gioia e Enzo. Essi sono la madre, il padre, il fratello e la sorella di Caterina. Trova il nome del padre, della madre, del fratello e della sorella di Caterina sapendo che 1. Daniele non ha sorelle 2. Maria non è la madre di Caterina Risposta aperta Madre …..… Padre …..… Sorella …..… Fratello …..…	**Risposta:** Madre Gioia; Padre Daniele; Sorella Maria; Fratello Enzo Applicazione del principio di non contraddizione. Visto che Daniele non ha sorelle mentre il fratello di Caterina ha ovviamente almeno una sorella, Daniele sarà di conseguenza il padre. Da cui Enzo sarà il fratello. Visto che Maria non è la madre, allora la madre sarà ovviamente Gioia , da cui Maria sarà la sorella.

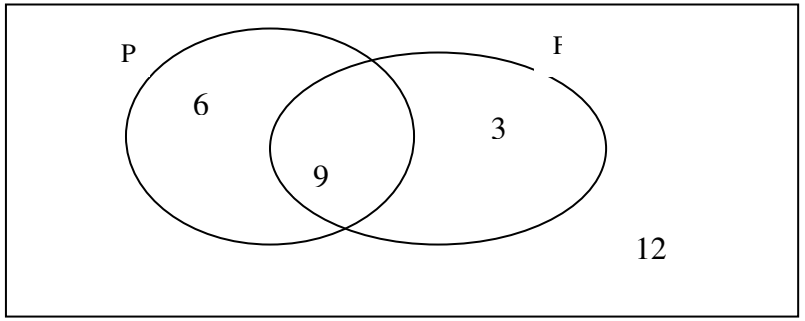
7.2004.8.M	Se tutti i belli sono ricchi e tutti i ricchi sono tristi, quale fra le seguenti frasi è corretta? *Risposte:* *a) alcuni tristi sono belli* *b) tutti i ricchi sono belli* *c) alcuni belli non sono tristi* *d) nessuna delle precedenti*	**Risposta:** A La situazione è rappresentabile con i tre insiemi B, R e T (gli insiemi di verità delle tre proposizioni) uno incluso nell'altro:  Verifichiamo le affermazioni proposte: L'affermazione a) è corretta, in quanto, se B non è vuoto, necessariamente degli elementi di T fanno anche parte di B. L'affermazione b) è scorretta perché è evidente che un elemento può appartenere ad R senza appartenere a B. L'affermazione c) è scorretta perché nel caso particolare in cui i tre insiemi B, R e T coincidono (situazione coerente con le premesse) allora tutti i belli sono necessariamente tristi. Essendo corretta a), di conseguenza è scorretta d).
8.2006.11.D	Un compito in classe inizia quando le lancette dell'orologio sono sovrapposte fra le 8 e le 9 e termina quando sono sovrapposte fra le 10 e le 11. Quanti minuti dura il compito? Risposte: a) esattamente 120 b) fra 120 e 124 c) fra 124 e 128 d) nessuna delle precedenti	**Risposta:** D Le lancette si sovrappongono ad intervalli regolari 11 volte ogni 12 ore, quindi ogni 12/11 di ora. Pertanto il compito dura 2*12/11=2,181818… ore. Si noti che 128 minuti corrispondono a 2.1333…ore.

9.2006.9.M	Il direttore di un ristorante con capienza massima 150 posti non ricorda quante erano le persone da lui servite in occasione dello scorso cenone di fine anno. Ricorda però che volendo sistemare tutte le persone servite in tavoli da 3 ne restava fuori esattamente una; inoltre, la stessa cosa succedeva sistemando tutte le persone in tavoli da 5 o tutte in tavoli da 7. Quante erano le persone servite in occasione dello scorso cenone di fine anno?	**Risposta:** 106 - Posto X il numero di invitati avremo: $X \leq 150$ $X= 3*K +1$ $X= 5* M +1$ $X= 7* N +1$ Quindi X-1 è multiplo sia di 7 di 3 che di 5. Il più piccolo multiplo di 7, 3 e 5 è il minimo comune multiplo $3\times5\times7$ (perché 3, 5, 7 sono numeri primi). Quindi $X = 3\times5\times7 +1 = 106$
10.2006.7.F	A Policrate che gli domandava quanti erano i suoi allievi, così rispose Pitagora: "I miei allievi possono essere suddivisi in insiemi disgiunti; in particolare - la metà coltiva la matematica - la quarta parte si dedica allo studio della natura - la settima parte ascolta con religioso silenzio le mie parole - inoltre ci sono tre allievi che non fanno nessuna delle cose precedenti" Quanti erano gli allievi di Pitagora? *Risposta aperta*	**Risposta:** 28 Gli insiemi sono disgiunti, nessuno coltiva due interessi contemporaneamente. Sia x il numero degli allievi. Allora: x/2 indica il numero di matematici x/4 indica il numero di naturalisti x/7 indica il numero di religiosi Quindi: $x/2 + x/4 + x/7 +3 = x$ Risolvendo l'equazione si ottiene x=28
11.2007.1.F	Serena, Bruno e Roberto hanno complessivamente 100 cioccolatini. Serena e Bruno ne hanno più di 20 a testa e Roberto meno di 20. Bruno ne ha cinque in meno di Serena. Serena ne possiede una quantità pari ad un multiplo di 8. Quanti cioccolatini ha ciascuno di loro? Risposta aperta Serena ……. Roberto ……. Bruno …….	**Risposta:** Serena 48, Roberto 9, Bruno 43 Posto che Br = Cioccolatini di Bruno Ser= Cioccolatini di Serena Rob= Cioccolatini di Roberto I dati che la domanda ci fornisce sono: 100=Br+Ser+Rob Br=Ser-5 Ser= 8, 16, 24, 32, 40, 48, …., 96 (multiplo di 8) Rob<20 Dobbiamo trovare il minimo numero di cioccolatini in possesso di Serena e Bruno, per cui Roberto

		sia minore di 20 Al massimo Bruno + Serena possiedono 99 cioccolatini (Roberto ne ha 1) Al minimo Bruno e Serena ne hanno 81 (Roberto ne ha 19) Al massimo Serena ne può avere: Br+Ser<=99 (Ser-5)+Ser<=99 Ser<=52 Al minimo Serena ne può avere: Br+Ser>=81 (Ser-5)+Ser>=81 Ser>=43 L'unico numero multiplo di 8 compreso tra 43 e 52 è 48. Quindi Serena ne ha 48 Bruno ne ha 48-5=43 Roberto ne ha 100-(48+43)=9
12.2002.10.D	Bruno è una persona prudente, ha trascorso l'intero mese di settembre in montagna ma ha fatto escursioni solo 12 giorni, ogni volta che il tempo era perfetto, cioè ne' pioveva ne' era molto freddo! Al ritorno racconta che nel 50% delle giornate ha piovuto e nel 40% faceva molto freddo. Quanti giorni ha contemporaneamente fatto freddo e ha piovuto?	**Risposta:** 9 Settembre ha 30 giorni, pertanto ha piovuto 0,5*30 =15 giorni e ha fatto freddo 0,4*30 = 12 giorni. Indichiamo con P l'insieme dei giorni in cui ha piovuto e con F quello dei giorni in cui ha fatto freddo; dal testo sappiamo che in 12 giorni né ha piovuto, né ha fatto freddo. Pertanto ci troviamo di fronte alla seguente situazione:  Conveniamo di indicare con #S il numero di elementi di un insieme S.. Quindi in 18 giorni ha piovuto oppure ha fatto freddo, cioè $\#(P \cup F) = 30 - 12 = 18$. Applicando il Principio di Inclusione-Esclusione per due insiemi, si ha: $\#(P \cup F) = \# P + \#F - \# (P \cap F)$ in quanto non bisogna contare due volte gli elementi dell'intersezione. Nel nostra caso :

18 = 15 + 12 − # (P ∩ F)

e quindi # (P ∩ F) = 9 come risulta dalla rappresentazione seguente:



13.2002.11.D

In quanti modi possiamo distribuire 10 caramelle a 3 bambini Aldo, Beatrice e Carla, in modo tale che ogni bambino riceva almeno due caramelle?
Nota bene: le soluzioni
Aldo = 3, Beatrice = 3, Carla=4
e
Aldo = 3,Beatrice = 4, Carla = 3
Sono due soluzioni diverse.

Risposta: 15
Se vogliamo che ciascun bambino riceva almeno due caramelle, troviamo, senza considerare diverse due soluzioni come quelle della nota, solo quattro possibilità:

	Aldo	Beatrice	Carla
I	2	2	6
II	2	3	5
III	2	4	4
IV	3	3	4

Dobbiamo però considerare, in corrispondenza di ciascuna soluzione, le possibili permutazioni dei numeri di caramelle ricevute da ciascun bambino. La situazione II presenta 3! = 6 possibilità, in quanto i te numeri 2, 3 e 5 possono essere scritti in 3! ordini diversi (come nel caso degli anagrammi di UBI) ; le altre situazioni invece permettono solamente ciascuna 3!/2! possibilità (permutazioni con ripetizione, come nel caso degli anagrammi di IBI), oppure più semplicemente possiamo dire che esistono solo tre modi per sistemare, in tre spazi, ad esempio un simbolo 2 e due simboli 4. Quindi in tutto troviamo 6+3*3 = 15 modi per distribuire le caramelle.

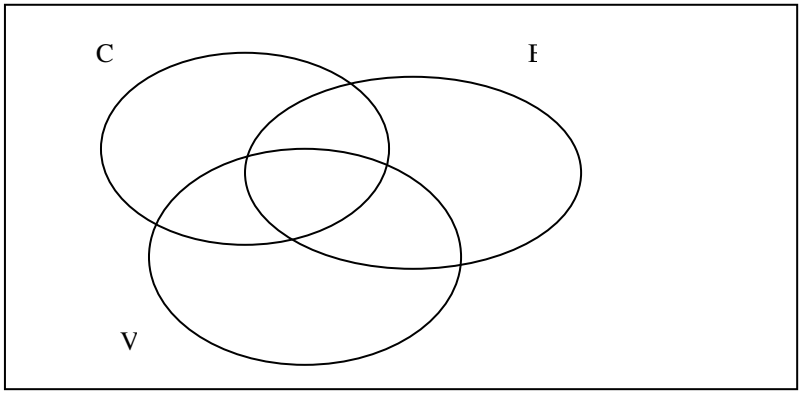
14.2002.9.M

In una classe ci sono 20 alunni, di cui 16 giocano a calcio, 12 a pallacanestro e 11 a pallavolo.
Quanti sono al minimo, coloro che praticano tutti e tre gli sport?

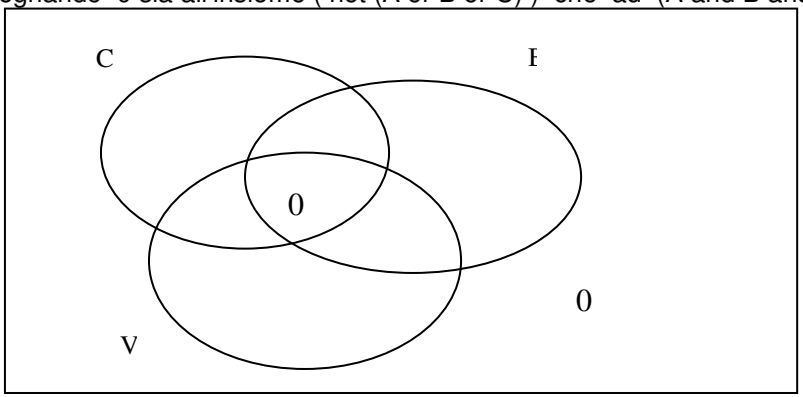
Risultato: zero

Indichiamo con C, B (Basket) e V (Volley) gli insiemi dei praticanti i tre sport.
Indichiamo inoltre, per comodità, con or, and, e not le operazioni sugli insiemi di unione,

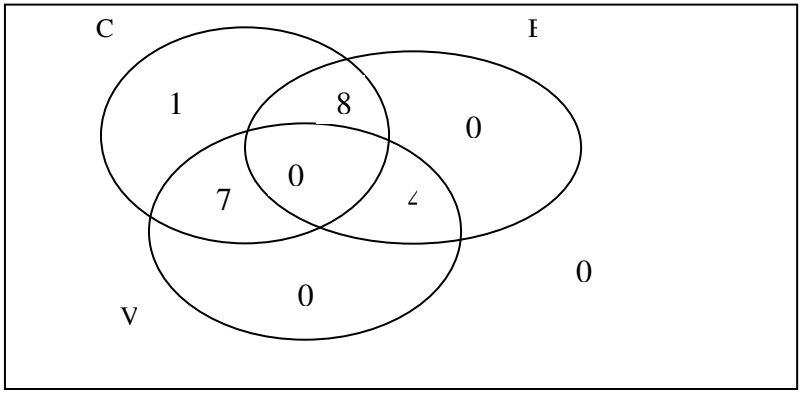
intersezione, e complemento rispetto all'insieme degli alunni.
Si tratta di completare il grafico seguente indicando le cardinalità.

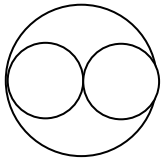


Se anche l'insieme dei praticanti il calcio includesse anche gli altri due, il numero dei non praticanti alcuno dei tre sport, da rappresentare fuori da tutti e tre gli insiemi, sarebbe al massimo 20 – 16 = 4 .
La minima intersezione fra i tre insiemi si ha quando tutti praticano almeno uno sport: difatti è intuitivo che quante più persone non praticano, tanto più le altre dovranno praticare più di uno sport in modo che gli insiemi C,B e V raggiungano i numeri di elementi indicati. Proviamo assegnando 0 sia all'insieme (not (A or B or C)) che ad (A and B and C):



A questo punto, siccome Num(B) = 12 e Num(V)=11, si deduce che Num(C and B) = Num(C and V) +1.
Proviamo partendo da Num(B and V) = 4, si deduce Num(C and B) = 8 e Num(C and V) = 7. A questo punto abbiamo collocato 19 elementi, e manca solo un calciatore, da collocare quindi

		nell'insieme C − (B or V). Ecco il grafico finale:  Sono rispettati tutti i vincoli, e il numero dei praticanti tutti e tre gli sport è il minimo possibile, cioè zero.
15.2006.3.F .	Quanti modelli di macchine di Formula 1 ha Mario se sono tutte Ferrari meno tre, sono tutte McLaren meno due ed ha anche una Williams? Risposta: a) 3 b) 4 c) 5 d) 6	**Risposta:** B La soluzione si ottiene risolvendo un sistema di 3 equazioni lineari in 3 incognite. Posto che F=Ferrari, M= McLaren, W = Williams e N= Totale otteniamo che: F=N-3 M=N-2 N= 1+F+M Quindi: N=1+(N-3)+(N-2) . Risolvendo si ottiene N=4
16.2004.11.D	In quante parti al massimo si può suddividere una torta con quattro tagli? *Risposte:* *a) 8* *b) 11* *c) 14* *d) nessuna delle precedenti*	**Risposta:** D Il problema chiede in sostanza di contare in quante parti può essere partizionato al massimo lo spazio "tagliandolo" con n = 4 piani. L'idea, ad ogni nuovo taglio, è di intersecare tutti i piani precedenti. Si osservi che per n = 1 la risposta è 2, per n = 2 la risposta è 4 e per n = 3 la risposta è 8. Tuttavia, per n = 4, la risposta è 15. La risposta generale a questa domanda, per n piani, è infatti data dalla formula: $C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + C(n,3)$ dove con $C(n,k)$ si è indicato il numero delle combinazioni di n oggetti su k posti. Nel nostro caso abbiamo quindi: 1 + 4 + 6 + 4 = 15. La risposta esatta è quindi la d ("nessuna delle precedenti"). La formula non è facilmente intuibile. Si può trovare una spiegazione, ad esempio, in : http://www.macalester.edu/~bressoud/pub/Art_of_Counting/Art_of_Counting.pdf

17.2004.10.M	Sapendo che in un cubo di due metri di lato ci possono stare 8 cubi di un metro di lato, in una sfera di due metri di raggio quante sfere di un metro di raggio ci possono stare? *Risposte:* *a) 1* *b) 4* *c) 8* *d) nessuna delle precedenti*	**Risposta:** D Osservare la figura relativa alla proiezione delle sfere sul piano. 
18.2006.6.F	Fondendo una statua di bronzo alta 50 cm e piena internamente, realizzo con il bronzo fuso ottenuto tante statuette simili (cioè con le stesse proporzioni della statua originale), anch'esse internamente piene, ma dell'altezza di 10 cm. Quante statuette riesco a realizzare? Risposte: a) 5 b) 25 c) 50 d) 125	**Risposta:** D Il volume è proporzionale al cubo della scala con cui si riducono i lati. Nel nostro caso la scala è di 1:5 10/50=1/5 Di conseguenza, il volume delle statuette piccole è 1/125 del volume iniziale. Quindi col Bronzo fuso della statua otteniamo 125 statuette.
19.2005.1.D **(identico a: 2.2005.1.M)**	Mario ha 83 macchinine che deve riporre in sacchetti. La suddivisione in sacchetti deve essere fatta in modo tale che quando i compagni di gioco di Mario gli chiederanno un numero qualsiasi di macchinine (compreso fra 1 e 83), Mario sarà in grado di consegnare il numero giusto di macchinine porgendo un certo numero di sacchetti senza aprirli per modificarne il contenuto. Quale è il numero minimo di sacchetti che Mario deve usare per riporre le sue macchinine? *Risposte:* *a) 7* *b) 8* *c) 21* *d) nessuna delle precedenti*	**Risposta:** A Possiamo fare riferimento alla rappresentazione binaria dei numeri da 1 a 63: con 6 sacchetti possiamo coprire qualsiasi numero da 1 a 63 (1+2+4+8+16+32). Ad esempio, nel caso in cui volessimo consegnare 10 macchinine, useremmo un sacchetto da 8 e un sacchetto da 2. Per i numeri *n* compresi fra 64 e 83 possiamo procedere così: riempiamo un ulteriore sacchetto con le restanti 20. La differenza *n*-20 sarà compresa tra 1 e 63 e la copriamo con il metodo precedentemente indicato. In questo modo potremo avere una soluzione per tutti i casi possibili.
20.2004.12.M	Una missione terrestre su Marte scopre una iscrizione.	**Risposta:** A

	Sapendo che dopo lunghe analisi si interpreta che l'iscrizione riporti 5+4=11, quante dita per mano aveva il marziano (si assuma che il marziano abbia avuto due mani)? *Risposte:* *a) 4* *b) 5* *c) 6* *d) nessuna delle precedenti*	Occorre riconoscere che la base del sistema di numerazione a cui si riferiscono le rappresentazioni dei numeri è 8. Si ricordi che la base di numerazione 10 è dovuto al numero delle dita della mano dell'uomo.
21.2005.12.F	Se 15+12=30 allora quanto fa 6+6? *Risposte:* *a) 15* *b) 17* *c) 19* *d) nessuna delle precedenti*	**Risposta:** A Occorre riconoscere che la base del sistema di numerazione della prima somma non è 10 ma 7. Basta quindi eseguire la seconda somma in base 7.

22.2002.8.D	Il seguente frammento di programma e' stato scritto per effettuare la ricerca di un elemento identificato dalla variabile chiave in un array ordinato (in ordine crescente) vett con n componenti intere. Se l'elemento chiave e' presente nell'array allora il programma deve fornire in uscita il valore di un indice dell'array il cui valore e' pari al valore di chiave; se l'elemento chiave non e' presente allora il programma deve ritornare il valore –1. Il frammento di programma seguente non e' sempre corretto; tuttavia e' possibile ottenere un programma che risponde alle specifiche modificando una sola istruzione. Indicate il numero di istruzione e come deve essere scritta. (Potete, per semplicità, supporre che n sia pari a 4).
	…..
	int ricerca(int vett[], int n, int chiave)
	{
	int inf = 0, sup = n-1, x; /* 1 */
	while (inf <= sup) /* 2 */
	{
	x = (inf + sup) /2; /* 3 */
	if (chiave < vett [x]) /* 4 */
	sup = x –1; /* 5 */
	else if (chiave > vett[x]) /* 6 */
	inf = x ; /* 7 */
	else /* 8 */
	return x; /* 9*/
	}
	return –1 /* 10 */
	…..
		Risposta: riga 7 diventa inf = x+1;
		
		Il problema risulta difficile per coloro che non conoscono l'algoritmo di ricerca binaria. Occorre infatti sempre escludere l'elemento dalla bisezione successiva per non incorrere in cicli infiniti. Ad esempio, se eseguiamo il frammento:
		
		int a[] = {1};
		printf("%d %", ricerca(a,1,2));
		
		andremo incontro ad un ciclo infinto con inf = sup = 0.

23.2006.2.M	Si consideri la seguente funzione.
	
	int funzione ( ){
	int contatore = 0;
	int sum = 0;
	while (contatore <= 4){
	contatore = contatore + 1;
	sum = sum + contatore;
	}
		Risposta: B
		
		Il ciclo while viene eseguito 5 volte (contatore che va da 0 a 4 compreso). La variabile contatore viene incrementata all'inizio, quindi nel ciclo stesso il contatore assumerà valori da 1 a 5 compresi. Nel ciclo si calcola chiaramente la sommatoria di tali valori, che vale 15. La funzione restituisce quindi il valore 15.

	return sum; } Quale valore restituisce la funzione? Risposte: a) 10 b) 15 c) 16 d) Nessuna delle risposte precedenti	

24.2005.6.F	Si consideri la seguente funzione:
	
	int trova(int bersaglio, int *valori) {
	int contatore = 0;
	while(valori[contatore++] != bersaglio);
	return contatore-1;
	}
	
	Essa serve a determinare l'indice in cui si trova un certo valore (rappresentato dal parametro bersaglio) in un vettore (rappresentato dal parametro valori).
	La funzione, però, funziona sempre solo se vale un vincolo specifico rispetto ai dati in ingresso, quale?
	Risposta aperta
		Risposta: Che il valore cercato esista effettivamente nel vettore di input.
		
		Si consideri che nel caso il valore non esista nel vettore, non essendoci un controllo sulla fine del vettore, avrà luogo una condizione di errore al termine della scansione del vettore stesso.

25.2006.5.D	Cosa stampa il seguente programma?
	
	#include <stdio.h>
	int funzione1(int arr[]) {
	int i = 1;
	while(arr[i] != -1)
	i = i * 2;
	return i;
	};
	int funzione2(int arr[], int f, int k) {
	int i = 0;
	int m;
	while(i <= f) {
	m = (i + f) / 2;
		Risposta: B
		
		Il main chiama la funzione1 passando come unico parametro l'array arr.
		All'ingresso della funzione avremo che la variabile i ad ogni ciclo while moltiplicata per 2, assumendo quindi i valori 2, 4, 8,… Dal while si esce quando arr[i] vale -1, quindi quando i vale 4, che è il valore restituito.
		Quindi ora f = 4.
		Viene ora effettuata la chiamata: a=funzione2 (arr, f, 4).
		funzione2 riceve i parametri in arr, f, k, quindi avremo, al suo ingresso
		arr={1,2,4,8,-1,-1,-1,-1,-1,-1}
		i = 0
		f = 4
		k = 4
		la condizione di ingresso nel while (i<=f) è vera, quindi viene calcolato

```
        if(arr[m] == k)
            return m;
        if((arr[m] == -1) || (arr[m] > k))
            f = m - 1;
        else
            i = m + 1;
        };
return -1;
};
main() {
    int arr[10]={1,2,4,8,-1,-1,-1,-1,-1,-1};
    int f=funzione1(arr);
    int a=funzione2(arr,f,4);
    int b=funzione2(arr,f,7);
    printf ("a=%d,b=%d\n",a,b);
}
```

Risposte:
a) a=2,b=4
b) a=2,b=-1
c) a=-1,b=4
d) a=-1,b=-1

m = (i+f)/2 = (0+4)/2 = 2
ora arr[m] == k è vera, quindi la funzione esce restituendo m, cioè 2.

Ora nel main avremo:

a = 2
f = 4

Viene effettuata la chiamata: b=funzione2 (arr, f, 7)
In funzione2:
i = 0
f = 4
k = 7

la condizione di ingresso nel while (i<=f) è vera, quindi viene calcolato:
m = (i+f)/2 = (0+4)/2 = 2
ora (arr[m] == k) e ((arr[m] == -1) || (arr[m] > k)) sono false, e viene calcolata i = m+1 = 3
quindi ora
i = 3
f = 4
k = 7
m = 2

(i<=f) è ancora vera, quindi viene calcolato:
m = (i+f)/2 = (3+4)/2 = 3 (essendo m un integer)
i = 3
f = 4
k = 7
m = 3

ora ((arr[m] == -1) || (arr[m] > k)) essendo vera la seconda, quindi f = m-1 = 3-1=2
i = 3
f = 2
k = 7
m = 3

(i<=f) è diventata falsa, il ciclo while non viene più eseguito e si esce dalla funzione restituendo -1.

a = 2
b = -1

		sono i valori delle variabili nel main che vengono visualizzati nell'ordine.

26.2006.2.M	Si consideri la seguente funzione.
	
	int funzione ( ){
	int contatore = 0;
	int sum = 0;
	while (contatore <= 4){
	contatore = contatore + 1;
	sum = sum + contatore;
	}
	return sum;
	}
	
	Quale valore restituisce la funzione?
	Risposte:
	a) 10
	b) 15
	c) 16
	d) Nessuna delle risposte precedenti
		Risposta: B
		
		Il ciclo while viene eseguito 5 volte (contatore che va da 0 a 4 compreso). La variabile contatore viene incrementata all'inizio, quindi nel ciclo stesso il contatore assumerà valori da 1 a 5 compresi. Nel ciclo si calcola chiaramente la sommatoria di tali valori, che vale 15. La funzione restituisce quindi il valore 15..

27.2003.1bisF	Cosa stampa il seguente programma ?
	
	#include <stdio.h>
	int prova(int*, int);
	int main(void) {
	int a,b, c;
	a=11;
	b=0;
	c=prova(&a,b);
	printf("a = %d; b = %d; c = %d", a, b, c);
	return 0;
	}
	int prova(int *x, int y) {
	*x=y+*x;
	y= *x+2;
	return *x;
	}
	
	Risposte:
	a) a = 11; b = 0; c = 0;
	b) a = 13; b = 2; c = 11;
	c) a = 11; b = 2; c = 11;
		Risposta: D
		
		La variabile a viene passata alla funzione prova per indirizzo, la b per valore.
		Ci troviamo quindi la seguente situazione:
		
		prima della chiamata di prova
		a=11, b=0
		
		all'ingresso nella funzione prova
		*x (cioè a) = 11, b = 0
		
		dopo l'esecuzione di prova (prima del return)
		*x (cioè a) = 11, b = 13
		
		all'uscita da prova (che restituisce *x cioè a)
		a = 11, b = 0, c = 11

	d) a = 11; b = 0; c = 11;	

28.2007.7.D	Cosa stampa il seguente programma?
	
	#include <stdio.h>
	#include <stdlib.h>
	int mistero(int m, int n) {
	  if (m == 0)
	  return n;
	  else if (n==0)
	  return mistero(m-1, 1);
	  else
	  return mistero(n-1,mistero(m-1, n-1));
	}
	int main(){
	  printf("%d %d %d %d\n", mistero(0,3), mistero(1,3),
	  mistero(2,3), mistero(3,3));
	  return 0;
	}
	
	Risposte:
	a) 3 1 2 0
	b) 3 1 1 0
	c) 3 1 0 1
	d) nessuna delle precedenti
		Risposta: C
		
		La difficoltà consiste nel fatto che per valori di ingresso di m ed n diversi da 0 viene richiamata la funzione per calcolare il secondo parametro.
		Nella stessa chiamata viene inoltre passato come primo paramento il valore di n-1 invece di m-1
		Bisogna quindi tenerne accuratamente conto nell'eseguire il tracing del programma.
		
		Vediamo, a titolo di esempio, il calcolo di mistero(1,3).
		
		Osserviamo preliminarmente che:
		
		mistero (0,x) = x (calcolo diretto, come base della ricorsione).
		
		mistero(1,3) = mistero(2,mistero(0,2)) = mistero(2,2) = mistero(1,mistero(1,1)) = mistero(0,mistero(0,0)) = mistero(0,0) = 0

29.2006.8.M	Si consideri la seguente funzione A.
	
	int B(int n);
	int A(int n){
	  if (n>1)
	  return n*B(n+1);
	  else
	  return 1;
	}
	int B(int n){
	  if (n>1)
	  return (n-1)*A(n-2);
	  else
	  return 1;
	  }
		Risposta: B
		
		Esempio di funzioni mutuamente ricorsive.
		
		Nell'eseguire la traccia delle funzioni si tenga conto che le funzioni sono ricorsive solo per valori maggiori di 1. Quindi A(1) darà sempre 1.
		Durante il secondo ciclo di traccia si noterà che la chiamata della funzione A(n-2) invocata dalla funzione B è identica alla chiamata precedente come da esemplificazione che segue:
		
		A(1)=1
		A(2): richiama B(3) che richiama A(1)
		A(3): richiama B(4) che richiama A(2)
		A(4): richiama B(5) che richiama A(3)
		A(5): richiama B(6) che richiama A(4)

	Indicare quali sono i valori restituiti dalle invocazioni A(1), A(2), A(3), A(4), A(5). Risposte: a) 1, 4, 24, 192, 1920 b) 1, 4, 36, 576, 14400 c) 1, 4, 16, 256, 65536 d) nessuna delle precedenti	Quindi il risultato della chiamata di A da parte di B è il risultato della chiamata precedente di A. Pertanto la semplificazione della funzione è: A(n)=n*n*risultato chiamata precedente Es: A(4)=4*4*A(3) = 4*4*36 = 576

30.2007.6.F	Cosa stampa il seguente programma?
	
	#include <stdio.h>
	#include <stdlib.h>
	int calcola(int n) {
	  if(n == 1) {
	  return 1;
	  } else if(n == 2) {
	  return 3;
	  } else if(n==3){
	  return n + calcola(n-1);
	  } else {
	  return n + calcola(n-1) + calcola(n-2);
	  }
	}
	int main(){
	  printf("%d\n",calcola(6));
	  return 0;
	}
	
	Risposte:
	a) 41
	b) 45
	c) 49
	d) nessuna delle precedenti
		Risposta: D
		
		Esempio di funzione ricorsiva.
		
		Si tenga presente che per i valori da 1 a 2 il risultato è restituito direttamente:
		
		calcola (1) = 1
		calcola (2) = 3
		
		La ricorsione entra in gioco da 3 in poi:
		
		calcola(3) = 3 + calcola (2) = 3 + 3 = 6
		
		calcola (6) = 6 + calcola (5) + calcola (4)
		calcola (5) = 5+ calcola 4) + calcola (3) = 5+ calcola (4) + 6
		calcola (4) = 4 + calcola (3) + calcola (2) = 4+6+3 = 13
		
		quindi :
		
		  calcola (5) = 5+13+6 = 24
		
		e infine:
		
		  calcola (6) = 6+24+13 = 43

31.2005.3.D	Si consideri il seguente frammento di programma.
	
	int B(int n);
	
	int A(int n){
	  int m;
	  if (n==0)
	  return 0;
	  else
	  if (n%2 == 0)
	  return n+B(n);
	  else
	  return B(n);
	}
	
	int B(int n){
	  int m;
	  if (n==0)
	  return 0;
	  else
	  if (n%2 == 1)
	  return n+A(n-1);
	  else
	  return A(n-1);
	}
	
	Dire che cosa calcola la funzione A assumendo che venga invocata passando un intero positivo.
	
	Risposta aperta
		Risposta: La somma di tutti di tutti i naturali tra 0 ed il parametro.
		
		Si tratta di un esempio di funzioni mutualmente ricorsive. In modo volutamente contorto viene calcolata la somma distinguendo tra n pari ed n dispari.
		Ad es.
		
		A(3) = B(3) = 3+A(2) = 3+2+B(1) = 3+2+1+A(0) = 3+2+1+0 = 6
		
		Ricordiamo che l'operatore % corrisponde all'operatore mod del Pascal (resto della divisione tra interi).

32.2003.7.M	Considerate le seguenti sei funzioni, con argomento N (un intero non negativo). Ciascuna di esse calcola un qualche valore scelto tra: N, 2N , N^2, N^3, 2^N , N!, N^N. Dovete stabilire qual e' il valore calcolato da ogni funzione (potrebbero esserci doppioni: più funzioni potrebbero calcolare lo stesso valore; notate inoltre che N! = 1x2 x 3 …. x N; quindi 3! = 6 e 5!= 120;	Risposte * A: ..... 2^N * B: ..... N^2 * C: ..... 2^N * D: ..... N!

inoltre si assume che 0! = 1).

```
int A(int N) {
  if (N > 0)
    return A(N - 1) + A(N - 1);
  else
    return 1;
}


int B(int N) {
  if (N > 0)
    return B(N - 1) + 2 * N - 1;
  else
    return 0;
}


int C(int N) {
  int i, R;
  R = 1;
  for (i = 0; i < N; i++)
    R = R + R;
  return R;
}

int D(int N) {
  int i, R;
  R = 1;
  for (i = 1; i <= N; i++)
    R = R * i;
  return R;
}

int E(int N) {
  int i, R;
  R = 0;
  for (i = 0; i < N; i++)
    R = R + N;
  return R;
}
```

* E: ..... N^2

* F: ..... N!

Alcune funzioni sono ricorsive, in altre bisogna prestare attenzione agli operatori ++ per definire quando viene incrementata la variabile e calcolare quindi il suo valore esatto.

Per il resto la difficoltà sta nel riconoscere soluzioni classiche o loro piccole varianti, magari aiutandosi con piccole tracce. Ad esempio, la funzione B calcola la somma dei primi N numeri dispari e si sa che vale N^2 (ad es. 1+3+5 = 9).

	int F(int N) {
	  if (N > 1)
	  return N * F(N - 1);
	  else
	  return 1;
	}
	
	int A(int n){
	  if (n > 0)
	  return n+A(n-1);
	  else
	  return 0;
	}
	
	int B(int n){
	  return (n*(n+1)/2);
	}
	
	Quale delle seguenti affermazioni è vera?
	
	Risposte:
	a) la funzione A calcola il fattoriale di un numero mentre la funzione B calcola la sommatoria di tutti i numeri compresi fra 1 ed n.
	b) sia la funzione A che la funzione B calcolano la sommatoria di tutti i numeri compresi fra 1 ed n, assumendo n maggiore o uguale a 1.
	c) la funzione A e la funzione B calcolano esattamente la stessa funzione.
	d) nessuna delle precedenti affermazioni è vera.	

33.2004.3.F	Si considerino le due seguenti funzioni:	***Risposta:*** *B* Si tratta di riconoscere semplici algoritmi e formule di base. Nel caso specifico della funzione A l'algoritmo ricorsivo che calcola la somma dei naturali da1 ad n. Nel caso della funzione B occorre riconoscere la formula di Gauss per lo stesso calcolo.